1141. 不変測度ノ存在ニツイテ III

河　田　　敬　義（東京文理大）

E. Hopf, Theory of measure and invariant integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932) ニ於テ，同ジ問題ガ既ニ解決サレテヰルコトヲ最近知リマシタノデ，ソレトノ関係ニツイテ考ヘテ見タイト思ヒマス．Hopf ノ結論ハ次ノ通リデス。

測度空間 (Ω, B, m) $(m(\Omega)=1)$ ト，ソノ上ノ一對一可測変換 σ（但シ σ ハ測度 0 ノ集合ヲ測度 0 ノ集合ニウツスモノトスル）ノ作ルアル群 G トガ與ヘラレテヰルト于前ニ與ヘタ意味デノ不変測度が存在スルタメノ必要十分條件ハ

[A] $\Omega \sim M$ ナラバ $m(M)=1$ トナルコトデアル。

此処ニ $\sim$ ハ前ニ與ヘタ Zerlegungsgleich ナルコトヲアラハス：$\Omega = \bigvee_{n=0}^{\infty} A_n$, $A_i \wedge A_j = 0\ (i \neq j)$, $m(A_0)=m(B_0)=0$, $A_n = B_n^{\sigma_n}$, $\sigma_n \in G$, $(n=1,2,\ldots\ldots)$

證明ハ間接法デアッテ，我々ノ方法トハ全ク異ッテヰル。サテ求メル條件ハ必要十分條件デアルが，實際ハナルベク十分條件トシテ弱イ方が望マシイ。ソコデ我々ノ方法ニヨッテモ亦[A]が十分デアルコトヲ示サウ。談話IIニヨレバ，求ムル必要十分條件ハ次ノ如クニ表ハセルノデアッタ：（前ニ與ヘタノト多少コトナルが，實際，證明中ニ用ヒル点ハ変ラナイ）

[B] 任意ノ E $(m(E)>0)$ ニ對シテ，アル $\delta>0$ がキマリ，$E \sim F$ ナラバ必ズ $m(F)>\delta$ トナルコトデアル。

[A] ナラバ [B] ナルコトノ證明。[B]ヲ否定シテ，アル $A_1 \sim A_2 \sim \cdots\cdots$, $A_i \wedge A_j = 0\ (i \neq j)$, $m(A_1)>0$ ナル集合ノ集リノ存在スルコトヲ證明スレバ，[A]が否定

サレルカラ証明ヲ終ル。

今[B]ヲ否定スレバ，アル E_0 ガ存在シテ $m(E_0)>0$ 且ツドンナニ小ナル ε_n ニ對シテモ $E_0 \sim E_n$, $m(E_n)<\varepsilon_n$ ナルヤウニ E_n ガトレル。

今 $E_0 \sim E_n$ ノ對應ヲ τ_n, $E_m \sim E_0 \sim E_n$ ノ對應ヲ $\tau_n^m = \tau_m^{-1}\tau_n$ トスル。

(1) $$E_0^0 = E_0 - \vee_{r=1}^{\infty} E_r \quad \text{トシ}$$

$$E_0^0 \overset{\tau_n}{\sim} E_n^0 \subset E_n, \quad n=1,2,\cdots\cdots$$

トスレバ

$$E_0^0 \frown E_n^0 = 0 \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

トナル。

(2) $$E_1^1 = E_1^0 - \vee_{r=2}^{\infty} E_r^0 \quad \text{トシ}$$

$$E_1^1 \overset{\tau_n^1}{\sim} E_n^1 \subset E_n^0 \subset E_n \quad (n=2,3,\cdots\cdots)$$

トスレバ

$$E_1^1 \frown E_n^1 = 0 \qquad (n=2,3,\cdots\cdots)$$

トナル。

(3) 一般ニ E_j^k $(k=0,1,\cdots\cdots, j \geqq k)$ ヲ

$$E_j^k \subset E_j^{k-1} \subset \cdots\cdots \subset E_j^0 \subset E_j,$$

$$\begin{cases} E_k^k \frown E_j^k = 0 & (j = k+1, \cdots\cdots), \\ E_k^k \overset{\tau^k}{\sim} E_j^k & (\quad " \quad) \end{cases}$$

ナルゴトク定メルコトガ出来ル。証明ハ帰納法デ，(1)，(2)ノ方法デ

$$E_k^k = E_k^{k-1} - \bigvee_{r=1}^{\infty} E_{k+r}^{k-1}$$

トシテ次々ニ作レバヨイ。

特ニ $E_k^k \frown E_j^j \subset E_k^k \frown E_j^k = 0 \quad (k < j)$

(4) 今 τ_n^{-1} ナル對應ニヨリ

$$E_k^k \sim E_0^k \subset E_0$$

トスレバ

$$E_0 \supset E_0^0 \supset E_0^1 \supset \cdots\cdots \supset E_0^k \supset \cdots\cdots$$

トナル。故ニ

$$E_0^{\infty} = \bigwedge_{k=0}^{\infty} E_0^k$$

トオケバ

$$E_0^{\infty} \overset{\tau_n}{\sim} E_n^{\infty} \subset E_n^n \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル E_n^{∞} ガ存在シ，$E_i^{\infty} \frown E_j^{\infty} \subset E_i^i \frown E_j^j = 0 \,(i \neq j)$ トナル。故ニ $m(E_0^{\infty}) > 0$ ナル如クニ E_n ガ作レバ証明ハ了ル。

$$\begin{cases} E_k^k \cap E_j^k = 0 & (j = k+1, \cdots\cdots), \\ E_k^k \overset{\tau^k}{\sim} E_j^k & (\qquad " \qquad) \end{cases}$$

ナルゴトク定メルコトガ出来ル。証明ハ帰納法デ，(1)，(2)ノ方法デ

$$E_k^k = E_k^{k-1} - \bigvee_{r=1}^{\infty} E_{k+r}^{k-1}$$

トシテ次々ニ作レバヨイ。

特ニ $E_k^k \cap E_j^j \subset E_k^k \cap E_j^k = 0 \quad (k<j)$

(4) 今 τ_n^{-1} ナル對應ニヨリ

$$E_k^k \sim E_0^k \subset E_0$$

トスレバ

$$E_0 \supset E_0^0 \supset E_0^1 \supset \cdots\cdots \supset E_0^k \supset \cdots\cdots$$

トナル。故ニ

$$E_0^{\infty} = \bigwedge_{k=0}^{\infty} E_0^k$$

トオケバ

$$E_0^{\infty} \overset{\tau^n}{\sim} E_n^{\infty} \subset E_n^n \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル E_n^{∞} ガ存在シ，$E_i^{\infty} \cap E_j^{\infty} \subset E_i^i \cap E_j^j = 0 \ (i \neq j)$ トナル。故ニ $m(E_0^{\infty}) > 0$ ナル如クニ E_n ガ作レバ証明ハ了ル。

(イ) $a_0 = m(E_0)$ トシ, $m(E_1) < \varepsilon_1 = \frac{1}{16} a_0$ ニトル。

(ロ) $E_0 \overset{\tau_1}{\sim} E_1$ ハ絶對連續ナ對應デアルカラ, λ_1 ヲ十分小ニトレバ

$E_1 \supset A_1$, $m(A_1) < \lambda_1$ ナラバ,

$$A_1 \overset{\tau_1^{-1}}{\sim} A_0 \subset E_0 \text{ ハ } m(A_0) < \frac{1}{16} a_0$$

ヲ滿足スル。

(ハ) 次ニ $m(E_2) < \varepsilon_2 = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{32} a_0, \frac{1}{2}\lambda_1\right)$ ニトル。

又 $E_0 \overset{\tau_2}{\sim} E_2$ ニヨリ $m(A_2) < \lambda_2$, $E_2 \supset A_2 \sim A_0 \subset E_0$ カラ $m(A_0) < \frac{1}{32} a_0$ ニ λ_2 ヲキメル。

(ニ) 次ニ $m(E_3) < \varepsilon_3 = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{64} a_0, \frac{1}{4}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2\right)$ ニトル。……… 逐ッテ同樣ニ $m(E_n) < \varepsilon_n$, $E_0 \overset{\tau_n}{\sim} E_n$,

$$\varepsilon_n = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{2^n} a_0, \frac{1}{2^{n-1}}\lambda_1, \frac{1}{2^{n-2}}\lambda_2, \cdots, \frac{1}{2}\lambda_{n-1}\right)$$

$= \varepsilon_n$ ヲエラブ。但シ λ_n ハ

$E_0 \overset{\tau_n}{\sim} E_n$ ナル對應デ $E_n \supset A_n$, $m(A_n) < \lambda_n$ ナラバ $A_n \overset{\tau_n}{\sim} A_0 \subset E_0$ ハ $m(A_0) < \frac{1}{8}\,\frac{1}{2^n} a_0$ トナルヤウニキメル。

(ホ) コノトキ

$$m(E_0^\circ) \geqq a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \geqq a_0\left(1 - \frac{1}{8}\sum \frac{1}{2^n}\right) = \frac{3}{4} a_0$$

一般ニ

$$m\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k}\right) \leqq \sum m(E_{n+k}) \leqq \lambda_n \sum \frac{1}{2^k} = \lambda_n$$

トナリ

$$E_n^{n-1} - E_n^n \subset \bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k}^{n-1} \subset \bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k}$$ カラ

$m\left(E_n^{n-1} - E_n^n\right) \leq \lambda_n$ トナル。

故ニ λ_n ノ キメ方カラ $m\left(E_0^{n-1} - E_0^n\right) < \frac{1}{8} \frac{a_0}{2^n}$ トナル。

故ニ $m(E_0^{\infty}) = m(E_0^0) - m(E_0^0 - E_0^1) - \cdots\cdots - m(E_0^{n-1} - E_0^n) - \cdots\cdots$

$$= \frac{3}{4} a_0 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_0 = \frac{1}{2} a_0 > 0$$

トナル。

q. e. d.

——— (18. 6. 21) ———